

# ALGORITMO CON COMPRESIÓN ÓPTIMA PARA MODELOS MIXTOS LINEALES RALOS

S. Pazos, M. Hurtado y C. Muravchik

LEICI, Dto Electrotecnia, FI-UNLP

## INTRODUCCIÓN

En varios problemas de procesamiento de señales los datos observados pueden ser representados mediante la contribución de tres fenómenos: la señal de interés, la interferencia, y el ruido. Atendiendo a su naturaleza frecuentemente aleatoria se requiere el empleo de técnicas estadísticas para obtener información de los datos. Dependiendo de la aplicación, cada uno de los citados fenómenos recibe distintos nombres; por ejemplo, la interferencia se denomina clutter en radar, reverberación en sonar y multicamino en comunicaciones inalámbricas. Estos problemas pueden ser descritos mediante los denominados modelos lineales mixtos. En la sección 2 se presenta el modelado y el problema a resolver.

En varias aplicaciones, como radar, la señal de interés posee una cualidad adicional denominada rareza. Esto quiere decir que la mayor parte de esta señal es nula y sólo posee valores diferentes de cero en unos pocos componentes.

Buscar una solución rala de un modelo lineal es un problema de optimización no convexo ya que está restringido a minimizar el número de componentes no-nulos de la señal, llamado norma  $l_0$ . Este planteo suele ser muy complicado de resolver por lo que una alternativa es usar una técnica de relajación, creando un problema convexo, buscando una solución con la menor norma  $l_1$ .

En la sección 3 de este trabajo se presenta un nuevo algoritmo para la resolución del problema inverso de modelos lineales mixtos raros subdeterminados, basado en optimizar la función de verosimilitud. Como este problema es mal condicionado y no posee solución analítica cerrada, se utiliza el algoritmo de esperanza-maximización (EM) para su resolución numérica (obtención de los parámetros del modelo). Sin embargo, como esta solución no es rala, en la sección 4 se describe un test de decisión que, aplicado en forma iterativa, garantiza la rareza eliminando gradualmente los componentes estadísticamente no significativos de la solución.

Adicionalmente, en la sección 5, se propone una modificación al algoritmo que reduce la cantidad mínima de datos observados necesarios para obtener una reconstrucción eficiente y precisa de la solución rala. Esta modificación consiste en realizar una compresión óptima de los datos observados antes de aplicar el algoritmo EM.

En la sección 6, mediante simulaciones, se ilustra el desempeño del algoritmo, obteniéndose mejoras sobre el método de óptima norma  $l_1$ .

Finalmente, en la sección 7, se analiza el comportamiento del algoritmo con señales reales de radar demostrando sus potenciales aplicaciones.

## MODELADO

En este trabajo se considera un modelo lineal mixto con  $K$  factores de interferencia,

$$y = X\beta + \sum_{k=1}^K Z_k u_k + e = X\beta + Zu + e \quad (1)$$

Donde  $y$  es el vector de datos medidos de tamaño  $N$ ,  $\beta$  es el vector de tamaño  $M$  correspondiente a la señal de interés,  $u_k$  es el vector de tamaño  $Q$  corresponde a cada una de las fuentes de interferencia,  $u$  es el vector de tamaño  $KQ$  que representa la interferencia,  $X$  y  $Z$  son matrices de regresores y  $e$  es el ruido. Se asume que la interferencia  $u$  y el ruido  $e$  poseen una distribución gaussiana de media cero con covarianzas  $C_u = I_K \otimes \Sigma$  y  $\sigma$  respectivamente, y existe independencia estadística entre ellos.

En el modelo dado por la ecuación (1) las matrices  $X$  y  $Z$  son conocidas. El vector ralo  $\beta$  representa la señal de interés desconocida. El principal reto es hallar la solución al problema inverso subdeterminado de estimar  $\beta$  dado que  $M > N$  y que  $\Sigma$  y  $\sigma$  son desconocidos.

### Algoritmo EM

El algoritmo EM (Expectation-Maximisation) es un procedimiento iterativo para determinar el estimador de máxima verosimilitud (Dempster et al., 1977). Este algoritmo aumenta los datos observados  $y$  con datos ocultos  $z$  produciendo así los datos completos  $x$ , elegidos para simplificar el procedimiento de estimación. Cada iteración del algoritmo EM consiste en dos pasos: el paso de esperanza E y el paso de maximización M. El paso E calcula la esperanza de la verosimilitud logarítmica de los datos completos  $L(\theta; x)$  con respecto a la distribución condicional de los datos ocultos dados los datos observados y el parámetro  $\theta$  en su valor actual  $\theta^{(t)}$ . Luego, el paso M actualiza la estimación del parámetro  $\theta$  maximizando la función calculada en el paso previo con respecto a  $\theta$ . En resumen,

$$\text{Paso E: } Q(\theta, \theta^{(t)}) = E_{z|y, \theta} \{L(\theta; x) | y, \theta^{(t)}\}$$

$$\text{Paso M: } \theta^{(t+1)} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} Q(\theta, \theta^{(t)})$$

### Implementación del Algoritmo

Para el problema de interés se genera el vector de datos completos  $x = [y^T, \beta^T, u^T]^T$  consistente en los datos observados  $y$ , y los datos ocultos  $z = [\beta^T, u^T]^T$ . Se asume que el parámetro oculto  $\beta$  posee una distribución gaussiana compleja de media cero y covarianza  $C_\beta = \operatorname{diag}\{\gamma\}$ , donde  $\gamma = [\gamma_1, \dots, \gamma_M]^T$  es un vector de parámetros positivos, reales que controlan la contribución de cada elemento de  $\beta$ . Adicionalmente se utiliza la letra  $\theta$  para representar los parámetros desconocidos  $\gamma, \Sigma$  y  $\sigma$ .

Aplicando el teorema de Bayes, se obtiene la verosimilitud logarítmica de los datos completos,

$$L(\theta; x) = \sum_{m=1}^M L(\gamma_m; \beta_m) + L(\sigma; e) + L(\Sigma; u)$$

Luego, combinando las ecuaciones del algoritmo EM se tiene la función Q

$$Q(\theta; \theta^{(t)}) = \sum_{m=1}^M Q(\gamma_m, \theta^{(t)}) + Q(\sigma, \theta^{(t)}) + Q(\Sigma, \theta^{(t)})$$

Se destaca que cada término de la ecuación previa depende sólo de  $\gamma_m$ ,  $\sigma$  ó  $\Sigma$ , por lo tanto el paso M se puede separar en tres problemas simples de maximización. Los parámetros estimados por el algoritmo EM resultan entonces,

$$\begin{aligned}\gamma_m^{(\tau+1)} &= \gamma_m^{(\tau)} + \left(\gamma_m^{(\tau)}\right)^2 X_m^T (C_y^{-1} S_y C_y^{-1} - C_y^{-1}) X_m \\ \sigma^{(\tau+1)} &= \frac{1}{N} \text{tr} \left[ \sigma^{(\tau)} I_N + (\sigma^{(\tau)})^2 (C_y^{-1} S_y C_y^{-1} - C_y^{-1}) \right] \\ \Sigma^{(\tau+1)} &= \frac{1}{K} \text{btr} \left[ C_u^{(\tau)} + C_u^{(\tau)} Z^T (C_y^{-1} S_y C_y^{-1} - C_y^{-1}) Z C_u^{(\tau)} \right]\end{aligned}$$

donde  $\text{tr}$  y  $\text{btr}$  son los operadores traza y traza bloque (Edelman y Murakami, 1995),  $X_m$  es la columna  $m$  de la matriz  $X$ ,  $C_y$  es la covarianza de los datos en la iteración  $\tau$

$$\begin{aligned}C_y^{(\tau)} &= X C_\beta^{(\tau)} X^T + Z C_u^{(\tau)} Z^T + \sigma^{(\tau)} I_N \\ C_\beta^{(\tau)} &= \text{diag} \left\{ \gamma_1^{(\tau)}, \dots, \gamma_M^{(\tau)} \right\} \\ C_u^{(\tau)} &= I_K \otimes \Sigma^{(\tau)}\end{aligned}$$

y  $S_y$  es la matriz muestral o empírica del momento de segundo orden de los datos

$$S_y = \frac{1}{D} \sum_{d=1}^D y_d y_d^T$$

Luego de calcular las estimaciones de la covarianza y la varianza de los componentes, se obtiene una estimación puntual de  $\beta$  aplicando la media posterior  $\hat{\beta} = C_\beta^{(\tau)} X^T C_y^{-1} \bar{y}$ , donde  $\bar{y}$  es la media muestral de los datos.

Se puede observar que la estimación de cada parámetro  $\gamma_m$  se calcula de forma independiente a los otros parámetros  $\gamma_j$ . En consecuencia, la estimación del vector  $\beta$  no será rara,  $\|\hat{\beta}\|_0 = M$ . Sin embargo, el algoritmo EM generará unos pocos coeficientes significativos y varios despreciables cuando  $\beta$  sea raro. Por lo tanto se necesita generar una regla de decisión para podar los coeficientes insignificantes.

## DETECCIÓN DE COMPONENTES PRINCIPALES

En esta sección se desarrolla un test para decidir si un componente del vector  $\beta$  está presente o no en cada iteración del algoritmo EM. El problema de decisión consiste en elegir entre dos posibles hipótesis

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0: & \gamma_i = 0 \\ \mathcal{H}_1: & \gamma_i \neq 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, M$$

### Test de detección

En la iteración  $\tau + 1$  del algoritmo EM, asumiendo que los valores estimados de  $\gamma_m$ ,  $\sigma$ , y  $\Sigma$  son los verdaderos, se construye un test de Neyman-Person basado en los datos completos  $x$ . Considerando las definiciones de los pasos del algoritmo EM, un estadístico es  $Q(\gamma_i^{(\tau+1)}, \theta^{(\tau)})$ , la función maximizada en el paso M. Preservando sólo el término que depende de los datos observados, el estadístico resulta

$$L_{\text{test}}^{(i)} = b_i^T S_y b_i$$

donde  $b_i = C_y^{-1} X_i$ .

## Desempeño del test

Para analizar el desempeño del test, se precisa determinar la distribución del estadístico del test. Se observa que  $S_y$  es una matriz aleatoria con distribución compleja de Wishart de dimensión  $N$  con  $D$  grados de libertad y matriz de covarianza  $C_y/D$ ,  $S_y \sim \mathcal{CW}_N(C_y/D, D)$ . Luego, aplicando las propiedades de la distribución de Wishart, el estadístico posee la distribución,

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{H}_0: T_0^{(i)} = 2D \frac{b_i^T S_y b_i}{b_i^T C_{y0} b_i} \\ \mathcal{H}_1: T_1^{(i)} = 2D \frac{b_i^T S_y b_i}{b_i^T C_{y1} b_i} \end{array} \right\} \sim \chi_{2D}^2$$

donde  $C_{y0}$  y  $C_{y1}$  son las covarianzas de los datos bajo la hipótesis correspondiente. Luego, la probabilidad de falsa alarma y de detección resultan,

$$P_{FA} = \Pr\{T_0^{(i)} > \alpha_{FA}; \mathcal{H}_0\} \quad P_D = 1 - F_{\chi_{2D}^2} \left( \frac{b_i^T C_{y0} b_i}{b_i^T C_{y1} b_i} \alpha_{FA} \right) \quad (2)$$

donde  $\alpha_{FA}$  es el umbral requerido para alcanzar un determinado nivel de falsa alarma. El umbral de detección  $\alpha_{FA}$  no depende de la covarianza  $\Sigma$  ni de la varianza  $\sigma$ , ni tampoco de las matrices  $X$  o  $Z$ . Por lo tanto,  $T_0^{(i)}$  posee la propiedad de nivel de falsa alarma constante (CFAR).

## COMPRESIÓN ÓPTIMA

Las señales raras tienen la particularidad de ser compresibles; por lo cual sólo se necesita un número reducido de mediciones o datos para reconstruir la información original. Este número reducido de datos se puede obtener proyectando la señal sobre un espacio de menor dimensión o matriz de compresión. En nuestro trabajo, se propone un método de diseño de una matriz de compresión óptima. En este contexto, el término óptimo se refiere a que la matriz resultante no solo permite comprimir la señal, sino que también rechaza las señales de interferencia, mejorando la estimación los parámetros de interés.

Al introducir la matriz de compresión  $A$  en el modelo, éste se modifica de la siguiente forma,

$$y = AX\beta + AZu + e$$

donde el vector de datos observados  $y$  en este caso sólo es de tamaño  $L < M$ . Esto permite que el algoritmo de estimación trabaje con matrices de menor tamaño. Se desea minimizar el error en la reconstrucción de  $\beta$ , por lo tanto se busca minimizar la covarianza condicional posterior, es decir  $C_{\beta|y}$ . Entonces, para hallar la matriz  $A$  óptima es necesario resolver el problema

$$\min_A \text{tr}(C_{\beta|y}) \quad \text{con} \quad \|A\|_F = \sqrt{\text{tr}(A^T A)} = M \quad (3)$$

donde la restricción es sobre la energía de la matriz de compresión. La clase de matrices  $A$  que se toman para la resolución de (3) son aquellas que cumplen que  $A^T A$  tiene sus autovectores en la dirección  $v_i$  de la proyección de  $C_{\beta}$  en el espacio generado por  $C_{\beta} + C_u$ .

Utilizando las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (Boyd, 2004) para la resolución del problema de estimación, obtenemos una solución del tipo waterfilling. Esto quiere decir que la energía se distribuirá en algunos autovalores de la matriz  $A$ , aquellos que tengan asociados autovectores con mayor valor  $v_i^T v_i$ , y los demás serán cero, permitiendo que el tamaño de la matriz  $A$  sea aún menor que  $L$ , alcanzando una mayor y óptima compresión.

## SIMULACIONES

Para analizar el desempeño analítico y empírico del algoritmo, se propone el siguiente ejemplo para el modelo (1).

El tamaño de los vectores  $\mathbf{y}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$  y  $\mathbf{u}_k$  es  $N = 10$ ,  $M = 100$  y  $Q = 2$ , respectivamente. Existen  $K = 5$  componentes de interferencia. Los datos  $\mathbf{y}$  son observados independientemente  $D = 20$  veces. Las matrices  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{Z}$  se generan aleatoriamente una vez con una distribución  $\mathcal{CN}(0,1)$  y normalizadas con su norma de Frobenius. Los componentes del vector ralo  $\boldsymbol{\beta}$  son todas cero excepto por la décima componente  $\beta_{10} = \sqrt{P_\beta}$  donde  $P_\beta = \|\boldsymbol{\beta}\|_2^2$  es la potencia de la señal. La covarianza de la interferencia es  $\boldsymbol{\Sigma} = P_\Sigma \mathbf{I}_Q / \sqrt{Q}$ , donde  $P_\Sigma = \|\boldsymbol{\Sigma}\|_F$ . La potencia del ruido es  $\sigma = P_\Sigma / 10$ . Para evaluar empíricamente el desempeño se realizan 1000 simulaciones Monte Carlo. Los cálculos se realizan para diferentes relaciones señal a ruido  $SNR = 10 \log_{10}(P_\beta / P_\Sigma)$ .

Una forma de describir el desempeño de un test de decisión es mediante un gráfico llamado característica de operación del receptor (ROC) (Kay, 1993), que muestra la relación entre la  $P_{FA}$  y la  $P_D$ . Se calculan las curvas analíticamente mediante las ecuaciones (2), como también empíricamente usando los datos de las simulaciones Monte Carlo. La figura 1 muestra una pérdida en el desempeño debido al hecho de que el test de Neyman-Person propuesto usa las estimaciones de la covarianza y las varianzas de los componentes en vez de su valor verdadero. También se analiza el desempeño del test calculando la tasa de falsa alarma empírica y analítica para distintos valores de  $\alpha_{FA}$ . En la figura 2 se muestra que ambas probabilidades coinciden en el rango de  $10^{-1}$  a  $10^0$ . Una vez más, como consecuencia del uso de valores estimados de los parámetros desconocidos en vez de los verdaderos, la tasa empírica es mayor de lo predicho por la teoría para una  $P_{FA}$  menor a  $10^{-1}$ .

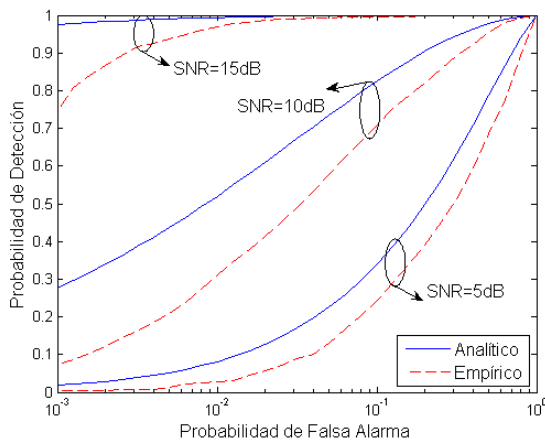


Fig. 1: Curvas características de operación del receptor (ROC) para el test propuesto.

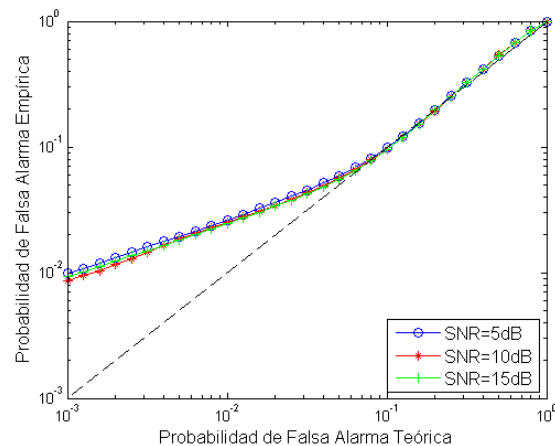


Fig. 2: Tasa de falsa alarma empírica y analítica.

A continuación se estudian las ventajas de combinar el test de detección con el método de estimación. Como regla de parada para el algoritmo EM se elige la tasa de cambio de la verosimilitud logarítmica de los datos. Las iteraciones del algoritmo de estimación se detienen cuando esta tasa cae debajo de cierto nivel. Para mejorar la convergencia del algoritmo EM, el test de detección de componentes se aplica luego de 50 iteraciones y así lograr una mejor estimación de los parámetros desconocidos. En la figura 3 se muestra que el valor de la regla

de parada decrece más rápido cuando el test poda en cada iteración los componentes de  $\beta$  despreciables; lo que implica más rápida llegada a convergencia. El pico de la figura ocurre cuando se introduce el test de detección a las 50 iteraciones.

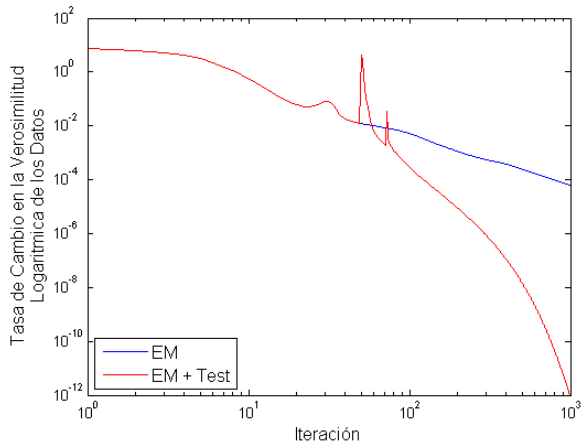


Fig. 3: Tasa de convergencia del algoritmo.

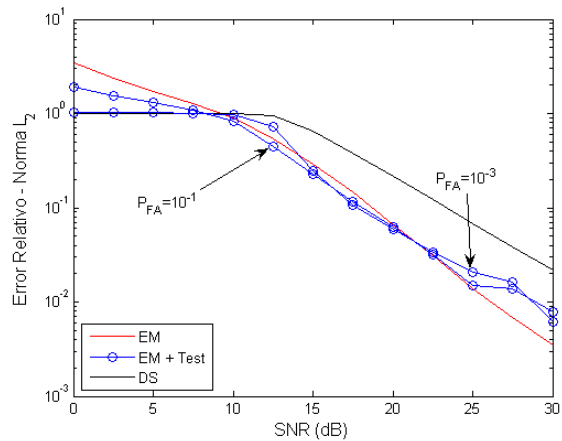


Fig. 4: Norma  $l_2$  del error de estimación en función del SNR

Luego se analiza el desempeño en la estimación del vector  $\beta$ . Como línea base, se estima  $\beta$  con el selector de Dantzig (Candes y Tao, 2007). Para resolver el problema convexo se utiliza el paquete CVX (Grant y Boyd, 2009). En la figura 4 se muestra la distancia entre  $\beta$  y su estimación calculando la norma  $l_2$  del error promediada sobre 1000 simulaciones Monte Carlo. Se observa que el método EM en conjunto con el test de detección supera la solución provista por el selector de Dantzig. Por ejemplo, este último requiere 6 dB más de relación señal a ruido (SNR) que el método EM para producir estimadores con un error relativo del orden de  $10^{-1}$ . En la figura 5, también se muestra que se puede reducir la norma  $l_1$  de la estimación ajustando el umbral de detección del test. Se remarca que los resultados producidos por el método son genuinamente raros,  $\|\hat{\beta}\|_0 \ll M$ , como consecuencia del test.

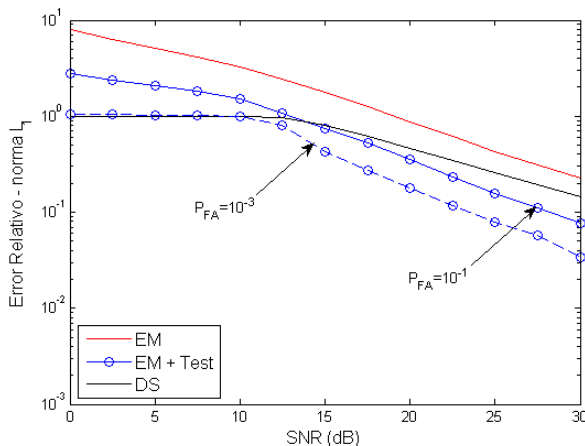


Fig. 5: Norma  $l_1$  del error de estimación en función del SNR

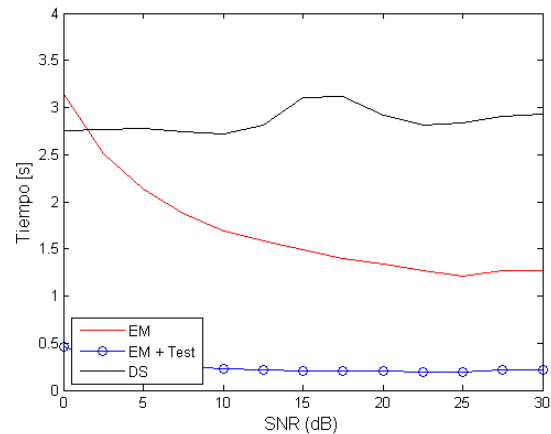


Fig. 6: Tiempo de cómputo para resolver la estimación de  $\beta$

Finalmente, en la figura 6 se muestra el tiempo requerido por cada método para resolver el problema. Se muestra que el algoritmo EM combinado con el test de detección es más rápido

que el algoritmo EM por sí solo, ya que alcanza más rápido la condición de parada. También se nota que ambos métodos son significativamente más rápidos que el selector de Dantzig.

## DATOS REALES DE RADAR

Se evalúa el algoritmo usando datos de radar recolectados por el radar polarimétrico IPIX de la Universidad McMaster (Haykin et al., 1991). Se procesó el conjunto de datos stare1 recogidos el 11 de Noviembre de 1993. Los datos corresponden a una pelota cubierta en papel de aluminio flotando en la superficie del mar. Detalles de cómo ajustar el modelo del radar a (1) se encuentran en (Hurtado, 2011). Se generó el diccionario sobrecompleto permitiendo la presencia del objetivo en las 54 celdas de rango que forman la huella del radar. Cada objetivo está representado usando la descomposición de Krogager de la matriz de dispersión. Para cada celda del rango se consideran nueve componentes, esfera, hélice izquierda y derecha, y seis diplos con diferentes orientaciones. Esta configuración resulta en vector de señal de tamaño  $M = 486$ .

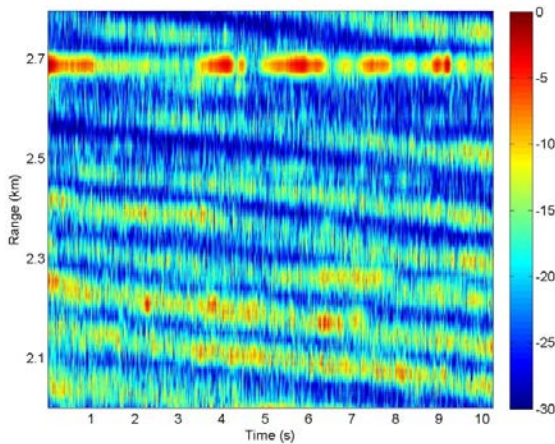


Fig 7: Imagen de Radar de los datos crudos

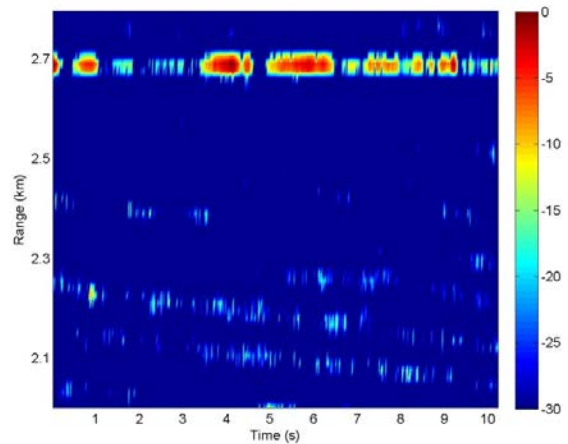


Fig 8: Imagen de Radar reconstruida con el algoritmo propuesto

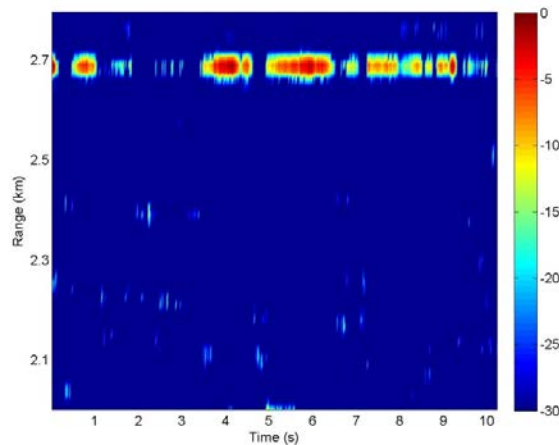


Fig 9: Imagen de Radar reconstruida con el algoritmo propuesto y compresión óptima

Se muestran en la figura 7 los datos crudos de radar en escala logarítmica. Se puede localizar el objetivo flotando en la superficie del mar a una distancia de 2.7 km del radar. Adicionalmente esta figura muestra que el clutter genera reflexiones casi tan fuertes como el objetivo. Luego, en la figura 8 se muestra la imagen de radar reconstruida a partir del mismo conjunto de datos utilizando el algoritmo propuesto con una  $P_{FA} = 10^{-6}$ . La respuesta del objetivo permanece sin cambios, pero la amplitud del clutter es ahora 20 dB más débil que la del objetivo.

Finalmente, la figura 9 muestra que, luego de la compresión óptima, en la imagen de radar se elimina aún más la interferencia producida por las reflexiones en la superficie del mar.

## CONCLUSIONES

Se analizó el problema de reconstrucción rala para modelos mixtos lineales. Se propuso un algoritmo que combina el algoritmo EM con un test de decisión. Mientras que el primero soluciona el problema inverso subdeterminado, el último poda los componentes estadísticamente despreciables. Se realizó una mejora del algoritmo para alcanzar una mayor compresión de los datos observados. Se mostró mediante simulaciones que el algoritmo se desempeña mejor que uno de los métodos de óptima norma  $l_1$ . Se enfatiza que este método no requiere ninguna condición específica para obtener una solución con baja norma  $l_0$ .

## Bibliografía

Boyd S. y Vandenberghe, L. Convex Optimization, Cambridge University Press. (2004).

Candes, E. y T. Tao. The Dantzig selector: Statistical estimation when  $p$  is much larger than  $n$ . Annals of Statistics, 35(6):2313–2351 (2007).

Dempster, A. P., N. M. Laird, y D. B. Rubin. Maximum likelihood from incomplete data via the em algorithm. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 39(1):1–38 (1977). ISSN 00359246.

Edelman, A. y H. Murakami. Polynomial roots from companion matrix eigenvalues. Mathematics of Computation, 64(4):763–776 (1995).

Grant, M. y S. Boyd. Cvx: Matlab software for disciplined convex programming. Annals of Statistics (2009). URL: <http://cvxr.com/cvx>

Haykin, S., C. Krasnor, T. J. Nohara, B. W. Currie, and D. Hamburger. A coherent dual-polarized radar for studying the ocean environment. IEEE Transaction on Geoscience and Remote Sensing, 29(1):189–191 (1991).

Hurtado, M., von Ellenreider, N., Muravchik, C. y Nehorai, A. Sparse modeling for polarimetric radar, IEEE Workshop on Statistical Signal Processing, France, (2011)

Kay, S. M. Fundamentals of Statistical Signal Processing: Detection Theory. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ (1993).

Krogager, E. New decomposition of the radar target scattering matrix. Electronics Letters, 26:1525–1527 (1990).